Kujawsko-Pomorskie Centrum Edukacji Nauczycieli
w Bydgoszczy
PLACÓWKA AKREDYTOWANA

KOD **PESEL**

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
2. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie będziesz mógł dostać pełnej liczby punktów.
3. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
4. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
5. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
6. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Marzec 2016

Czas pracy:
180 minut

Liczba punktów
do uzyskania: 50

Zadanie 1. (1 pkt)

Funkcja $f(x) = \left|\frac{2x+a}{x+b}\right|$ jest funkcją malejącą w przedziale $(-\infty;\ -1\rangle$ oraz $(1;\ +\infty)$, rosnącą w przedziale $\langle -1; 1)$, a do jej wykresu należy punkt $A = \left(9, \frac{5}{2}\right)$. Zatem wzór funkcji f ma postać

A. $f(x) = \left|\frac{5}{x+1} + 2\right|$ **B.** $f(x) = \left|\frac{2}{x-1} + 2\right|$ **C.** $f(x) = \left|\frac{4}{x-1} + 2\right|$ D . $f(x) = \left|\frac{2}{x+1} + 2\right|$

Zadanie 2. (1 pkt)

Liczb naturalnych siedmiocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie raz cyfra 7, dokładnie dwa razy cyfra 4, nie występuje cyfra zero, a pozostałe cyfry są między sobą różne jest

A . $\binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ **B.** $\binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{7}{4}$

C. $\binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2} + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ **D.** $\binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot 7^4$

Zadanie 3. (1 pkt)

Ciąg (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$

Wówczas wzór ogólny ciągu (a_n) ma postać

A. $a_n = 2^n - 5$ **B.** $a_n = 2n - 5$ **C.** $a_n = (-1)^n \cdot (5 - 2n)$ **D.** $a_n = -3n + 2$

Zadanie 4. (1 pkt)

Zbiorem rozwiązań nierówności $sinx > -\frac{1}{2}$ dla $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ jest

A. $\left\langle -\pi, -\frac{2}{3}\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}, \pi\right\rangle$ **B.** $\left\langle -\pi, -\frac{5}{6}\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6}, \pi\right\rangle$ **C.** $\left(-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$ **D.** $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$

Zadanie 5. (1 pkt)

Granica $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x+2} - 2}$ równa jest:

A. 0 **B.** 1 **C.** 8 **D.** $+\infty$

Zadanie 6. (2 pkt)

Z pojemnika zawierającego 10 kul białych i 6 czarnych losujemy jedną kulę i wkładamy zamiast niej jedną kulę czarną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jeżeli teraz wylosujemy z pojemnika dwie kule, to obie wylosowane kule będą białe. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku otrzymanego rozwiązania.

Zadanie 7. (3 pkt)

W ciągu arytmetycznym suma n początkowych wyrazów o numerach parzystych jest równa $6n^2 - 4n$. Oblicz sumę n początkowych wyrazów o numerach nieparzystych.

Zadanie 8. (3 pkt)

Wykaż, że jeżeli $a > 0\ i\ a \neq 1, b > 0\ i\ b \neq 1$, to $|log_a b + log_b a| \geq 2$.

Zadanie 9. (3 pkt)

Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. Długości boków tego czworokąta są równe $|BC| = 12, |CD| = 6$, $|AD| = 10$, a kąt ABC ma miarę 60^0. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.

Zadanie 10. (4 pkt)

Funkcje $f(x) = -4x^2 - 8$, $g(x) = 2x^2 + 4ax + 2a^2 + 4$, $h(x) = 8x^2 + 4b^2$ mają tę własność, że dla każdej liczby rzeczywistej x, wartości funkcji $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ tworzą w pewnej kolejności trzywyrazowy ciąg geometryczny. Oblicz iloraz tego ciągu.

Zadanie 11. (5 pkt)

Rozwiąż nierówność, której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego (wszystkie składniki szeregu są różne od zera)

$$\frac{x^2-4}{5}+\left(\frac{x^2-4}{5}\right)^2+\left(\frac{x^2-4}{5}\right)^3+\ldots \geq x+2$$

Zadanie 12. (3 pkt)

Udowodnij, że jeżeli liczba $x+\frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą, to liczba $\frac{1}{x^3}+x^3$ jest też liczbą całkowitą.

Zadanie 13. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $sinx\ sin3x = \frac{1}{2}$.

Zadanie 14. (5 pkt)

Długości krawędzi podstawy prostopadłościanu są równe $3cm,\ 4\ cm$. Krawędź boczna ma długość $2cm$. Oblicz pole przekroju tego graniastosłupa płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $60°$. Sporządź rysunek i zaznacz na nim przekrój oraz kąt jego nachylenia do płaszczyzny podstawy.

Zadanie 15. (6 pkt)

Wszystkie wierzchołki trapezu $ABCD$ ($AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$) leżą na paraboli o równaniu $y = 3 - \frac{1}{3}x^2$. Wierzchołki A i B są punktami przecięcia tej paraboli z osią OX. Oblicz współrzędne wierzchołka trapezu o obu współrzędnych dodatnich, dla którego pole trapezu jest równe $\frac{25}{3}$.

Zadanie 16. (7 pkt)

Dane jest równanie: $x^2 + (m-5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$. Zbadaj, dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Oblicz tę wartość.

Brudnopis