



Kujawsko-Pomorskie Centrum Edukacji Nauczycieli  
w Bydgoszczy

PLACÓWKA AKREDYTOWANA

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY  
Z MATEMATYKI**

**POZIOM ROZSZERZONY**

1. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
2. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie będziesz mógł dostać pełnej liczby punktów.
3. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
4. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
5. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
6. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

**Marzec 2016**

**Czas pracy:**

**180 minut**

**Liczba punktów**

**do uzyskania: 50**

**Zadanie 1. (1 pkt)**

Funkcja  $f(x) = \left| \frac{2x+a}{x+b} \right|$  jest funkcją malejącą w przedziale  $(-\infty; -1)$  oraz  $(1; +\infty)$ , rosnącą w przedziale  $(-1; 1)$ , a do jej wykresu należy punkt  $A = \left(9, \frac{5}{2}\right)$ . Zatem wzór funkcji  $f$  ma postać

A.  $f(x) = \left| \frac{5}{x+1} + 2 \right|$     B.  $f(x) = \left| \frac{2}{x-1} + 2 \right|$     C.  $f(x) = \left| \frac{4}{x-1} + 2 \right|$     D.  $f(x) = \left| \frac{2}{x+1} + 2 \right|$

**Zadanie 2. (1 pkt)**

Liczb naturalnych siedmiocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie raz cyfra 7, dokładnie dwa razy cyfra 4, nie występuje cyfra zero, a pozostałe cyfry są między sobą różne jest

A.  $\binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$                       B.  $\binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{7}{4}$   
C.  $\binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2} + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$                       D.  $\binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot 7^4$

**Zadanie 3. (1 pkt)**

Ciąg  $(a_n)$  określony jest wzorem rekurencyjnym  $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$

Wówczas wzór ogólny ciągu  $(a_n)$  ma postać

A.  $a_n = 2^n - 5$     B.  $a_n = 2n - 5$     C.  $a_n = (-1)^n \cdot (5 - 2n)$     D.  $a_n = -3n + 2$

**Zadanie 4. (1 pkt)**

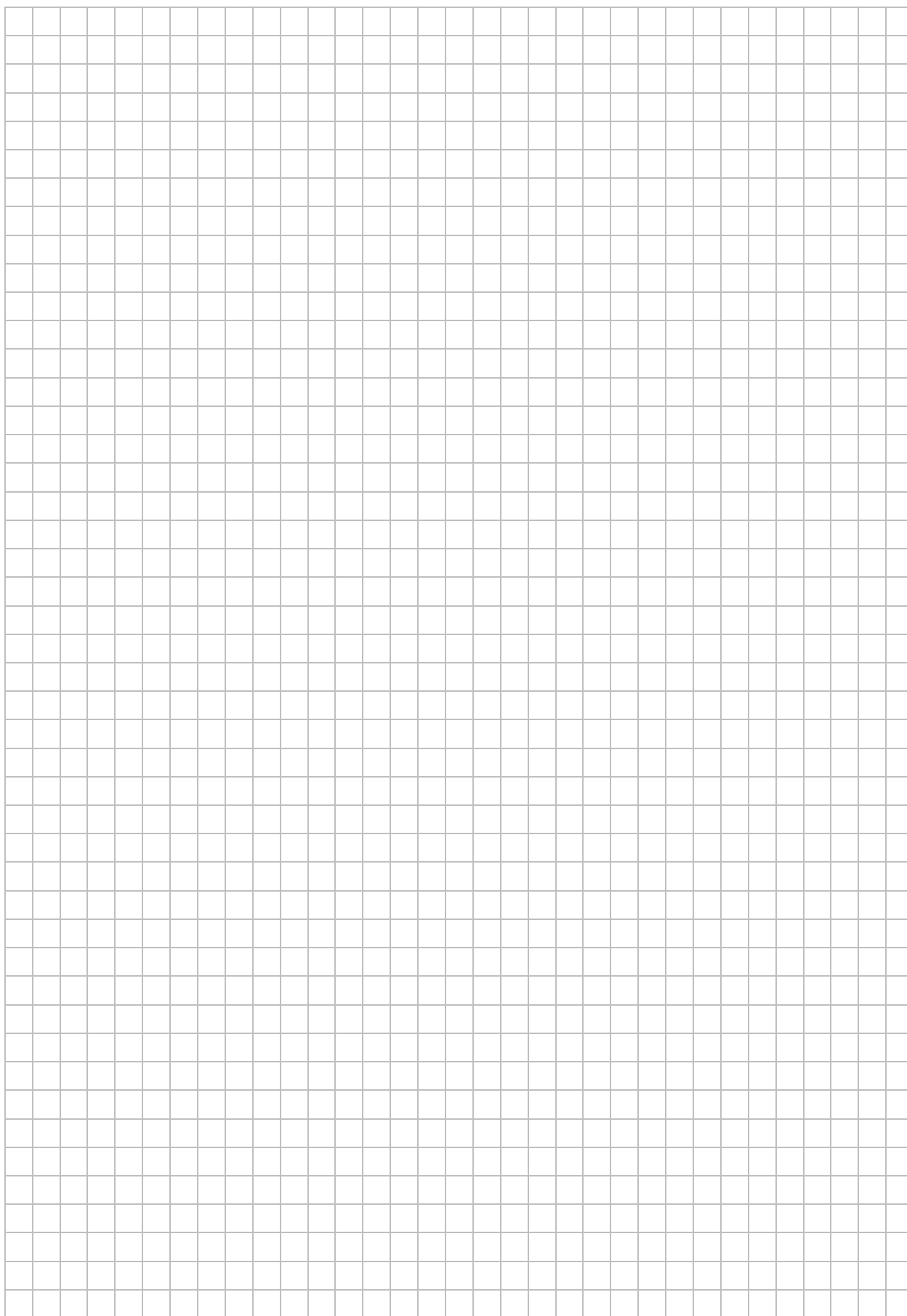
Zbiorem rozwiązań nierówności  $\sin x > -\frac{1}{2}$  dla  $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$  jest

A.  $\left\langle -\pi, -\frac{2}{3}\pi \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{3}, \pi \right\rangle$     B.  $\left\langle -\pi, -\frac{5}{6}\pi \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{6}, \pi \right\rangle$     C.  $\left\langle -\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi \right\rangle$     D.  $\left\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\rangle$

**Zadanie 5. (1 pkt)**

Granica  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x+2} - 2}$  równa jest:

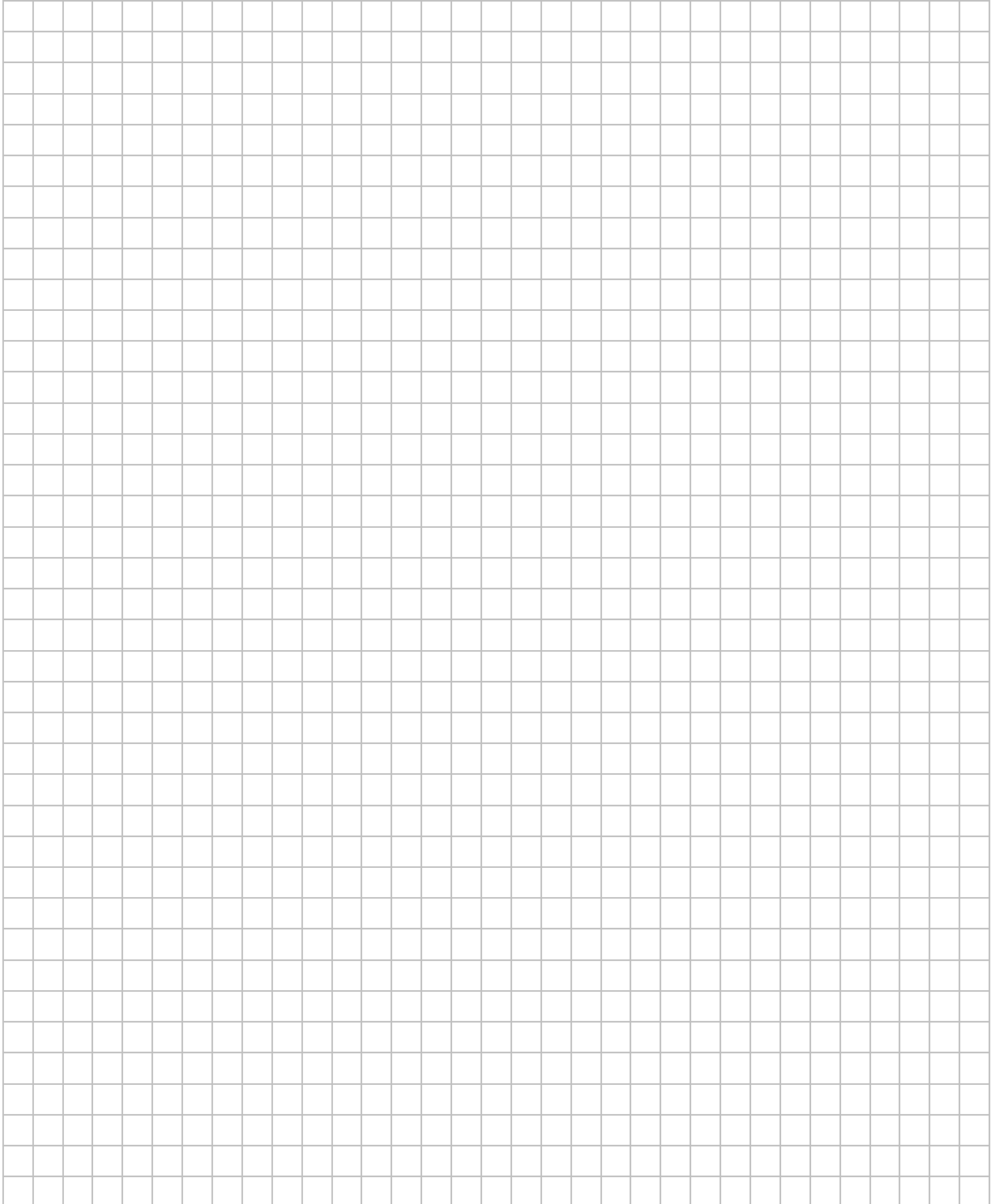
A. 0                      B. 1                      C. 8                      D.  $+\infty$



**Zadanie 6. (2 pkt)**

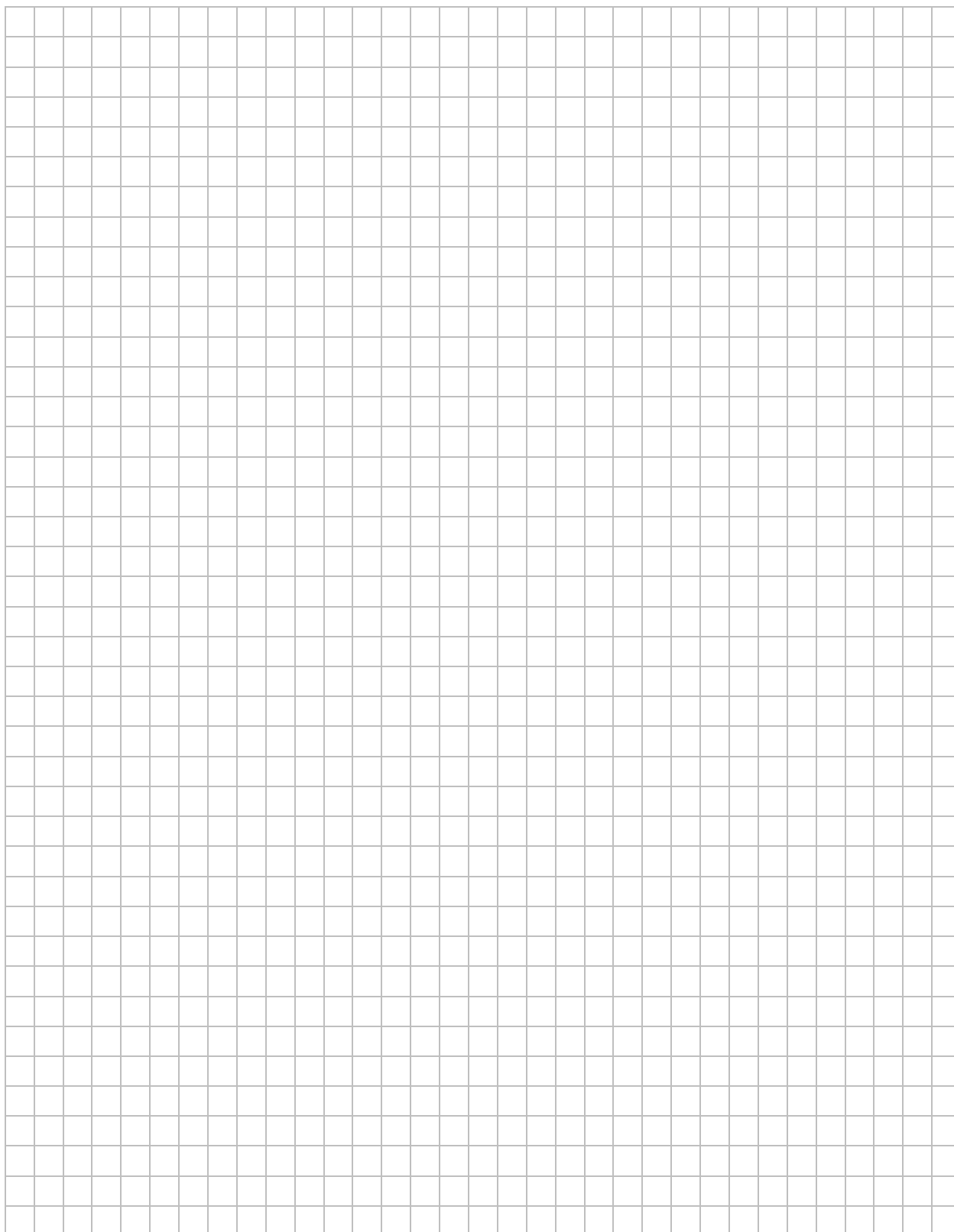
Z pojemnika zawierającego 10 kul białych i 6 czarnych losujemy jedną kulę i wkładamy zamiast niej jedną kulę czarną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jeżeli teraz wylosujemy z pojemnika dwie kule, to obie wylosowane kule będą białe. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku otrzymanego rozwiązania.

--	--	--



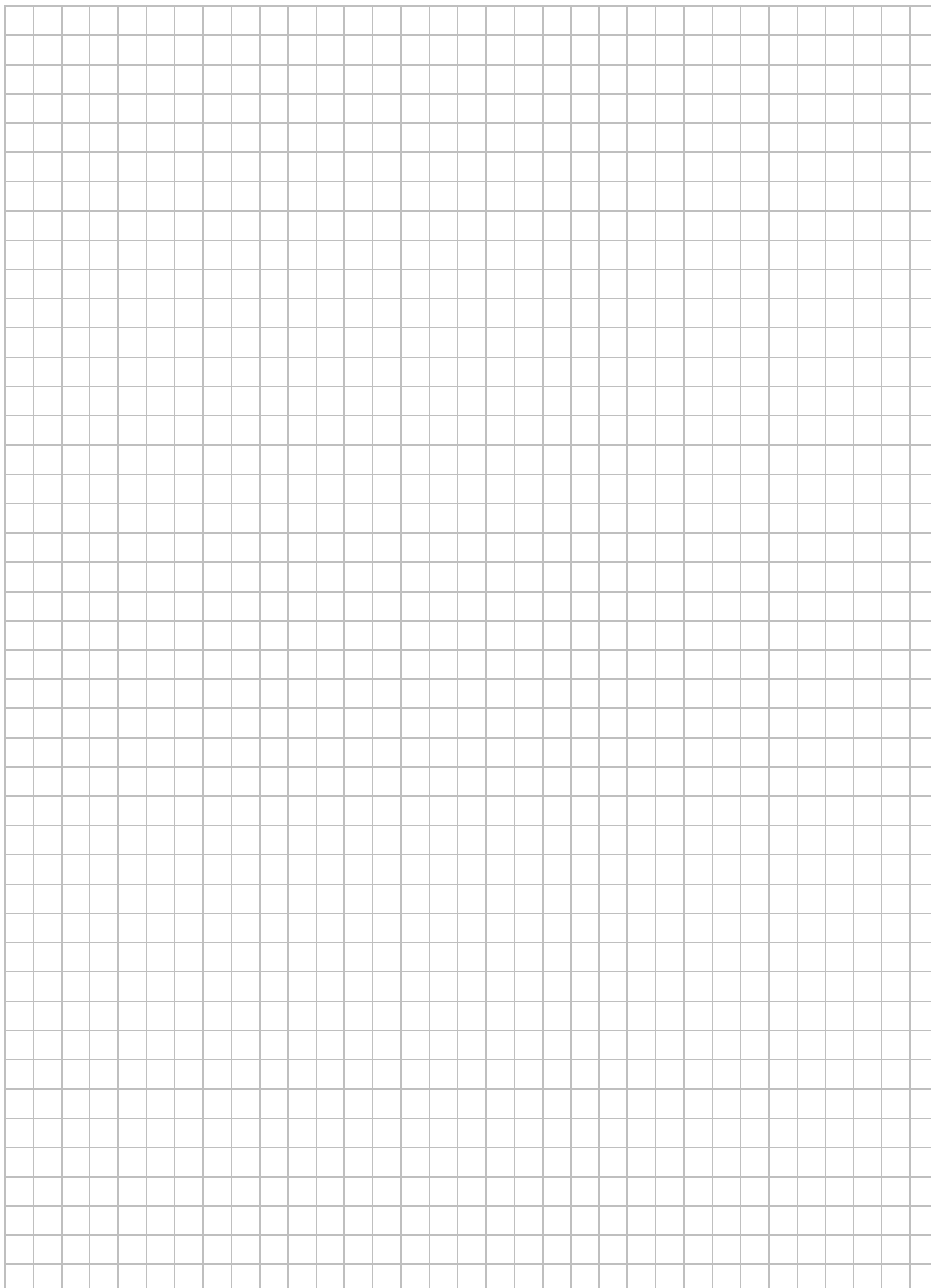
**Zadanie 7. (3 pkt)**

W ciągu arytmetycznym suma  $n$  początkowych wyrazów o numerach parzystych jest równa  $6n^2 - 4n$ . Oblicz sumę  $n$  początkowych wyrazów o numerach nieparzystych.



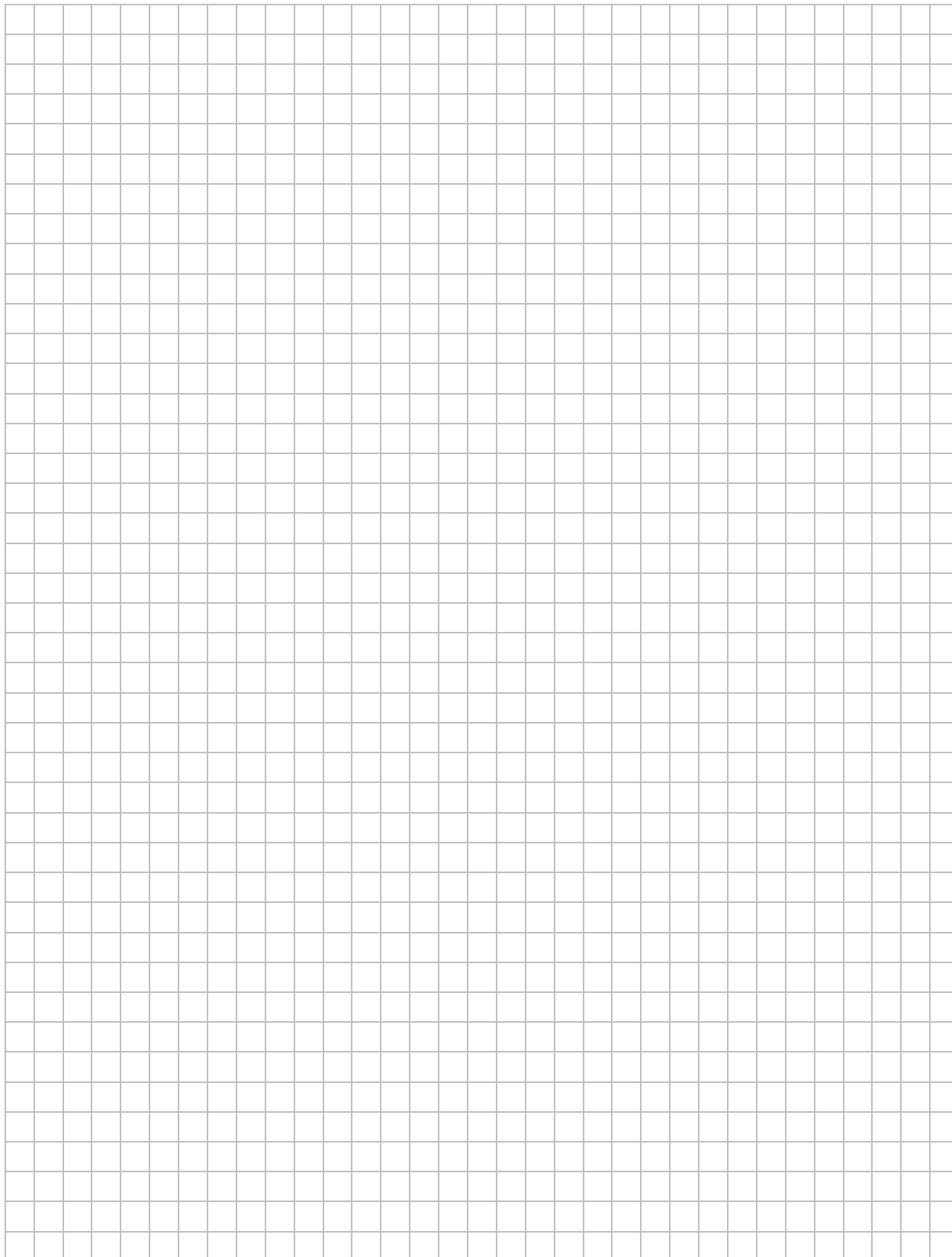
**Zadanie 8. (3 pkt)**

Wykaż, że jeżeli  $a > 0$  i  $a \neq 1$ ,  $b > 0$  i  $b \neq 1$ , to  $|\log_a b + \log_b a| \geq 2$ .



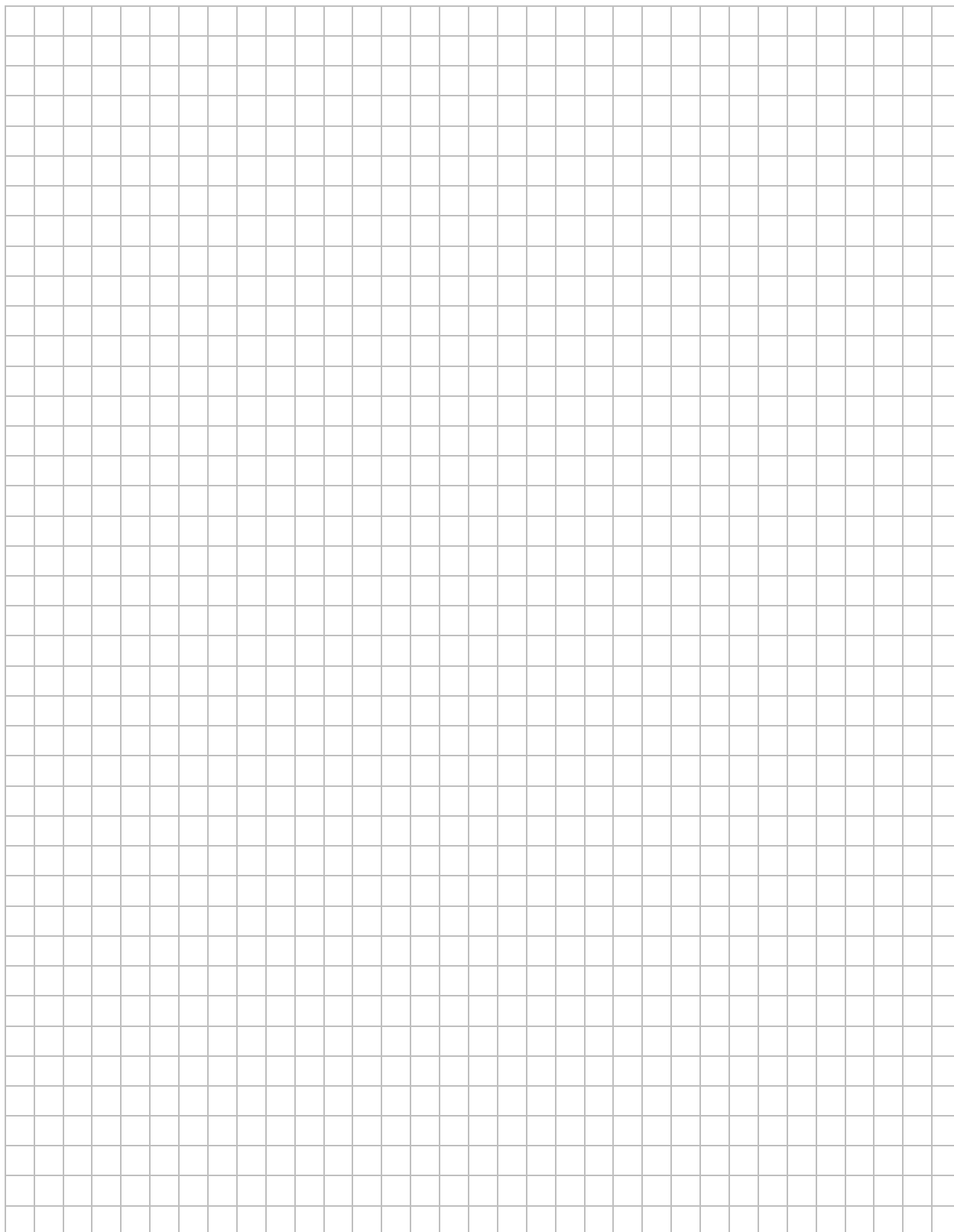
**Zadanie 9. (3 pkt)**

Na czworokącie  $ABCD$  można opisać okrąg. Długości boków tego czworokąta są równe  $|BC|=12$ ,  $|CD|=6$ ,  $|AD|=10$ , a kąt  $ABC$  ma miarę  $60^\circ$ . Oblicz długość promienia okręgu opisanego na czworokącie  $ABCD$ .



**Zadanie 10. (4 pkt)**

Funkcje  $f(x) = -4x^2 - 8$ ,  $g(x) = 2x^2 + 4ax + 2a^2 + 4$ ,  $h(x) = 8x^2 + 4b^2$  mają tę własność, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ , wartości funkcji  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  tworzą w pewnej kolejności trzywyrazowy ciąg geometryczny. Oblicz iloraz tego ciągu.

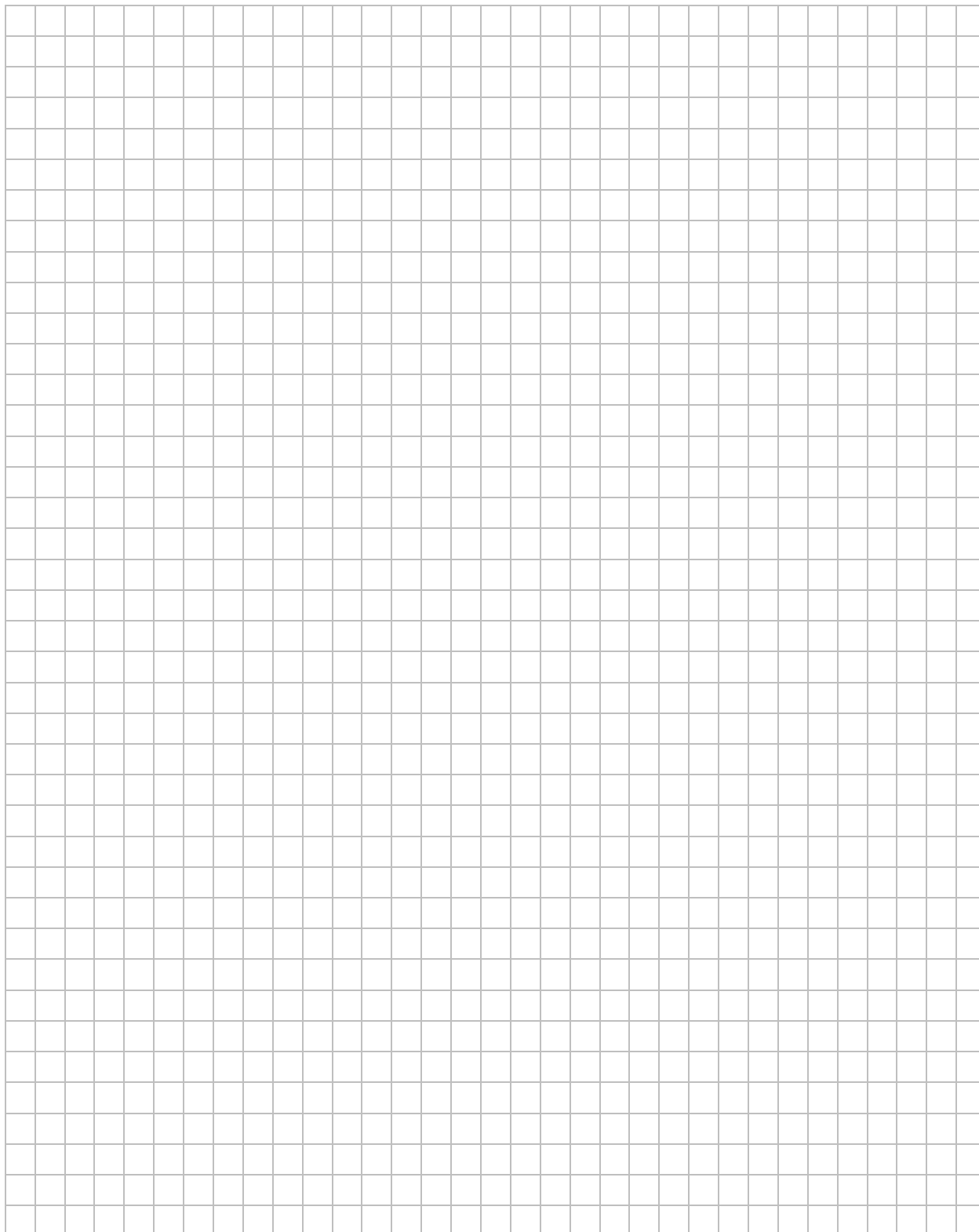




**Zadanie 11. (5 pkt)**

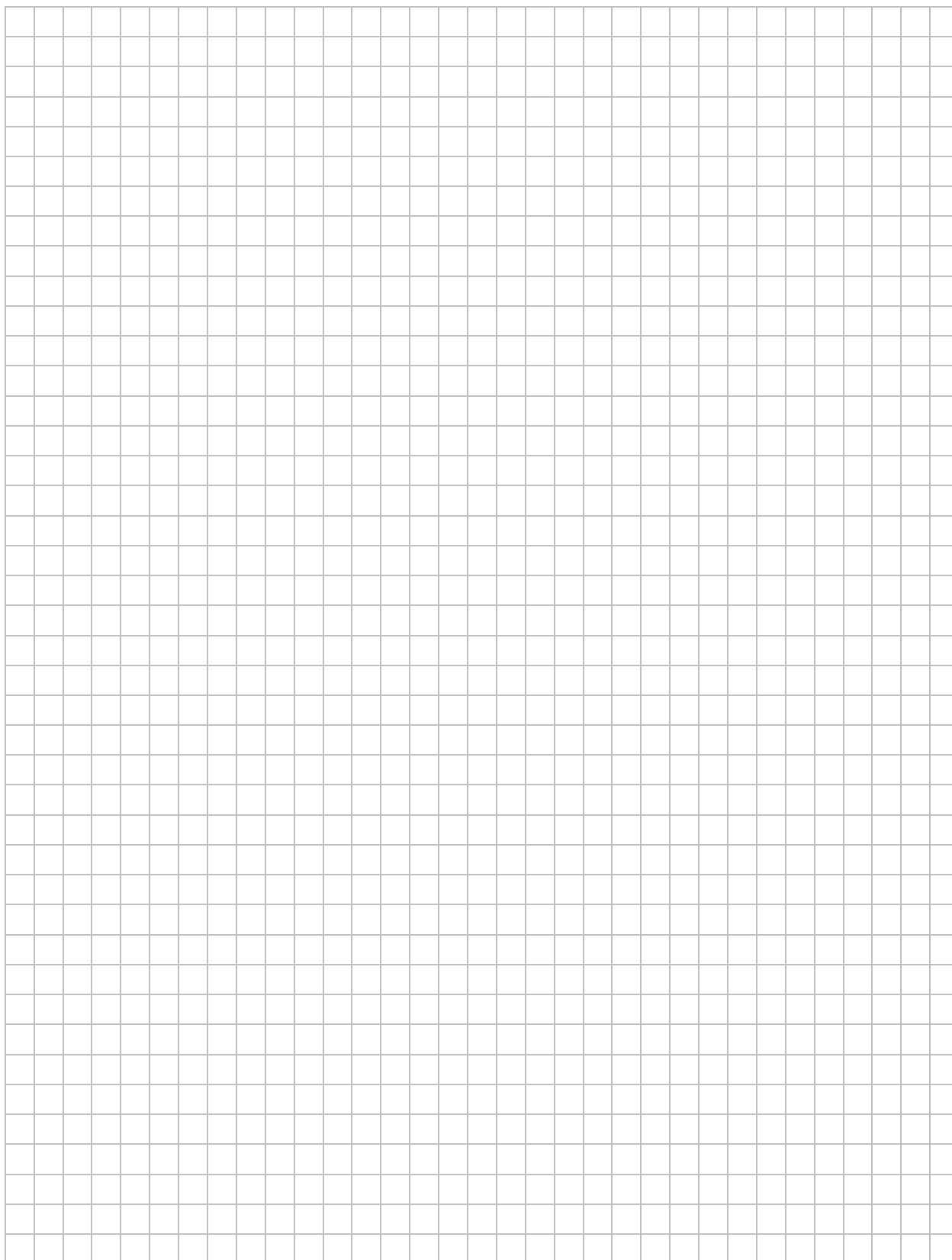
Rozwiąż nierówność, której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego (wszystkie składniki szeregu są różne od zera)

$$\frac{x^2-4}{5} + \left(\frac{x^2-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{x^2-4}{5}\right)^3 + \dots \geq x + 2$$



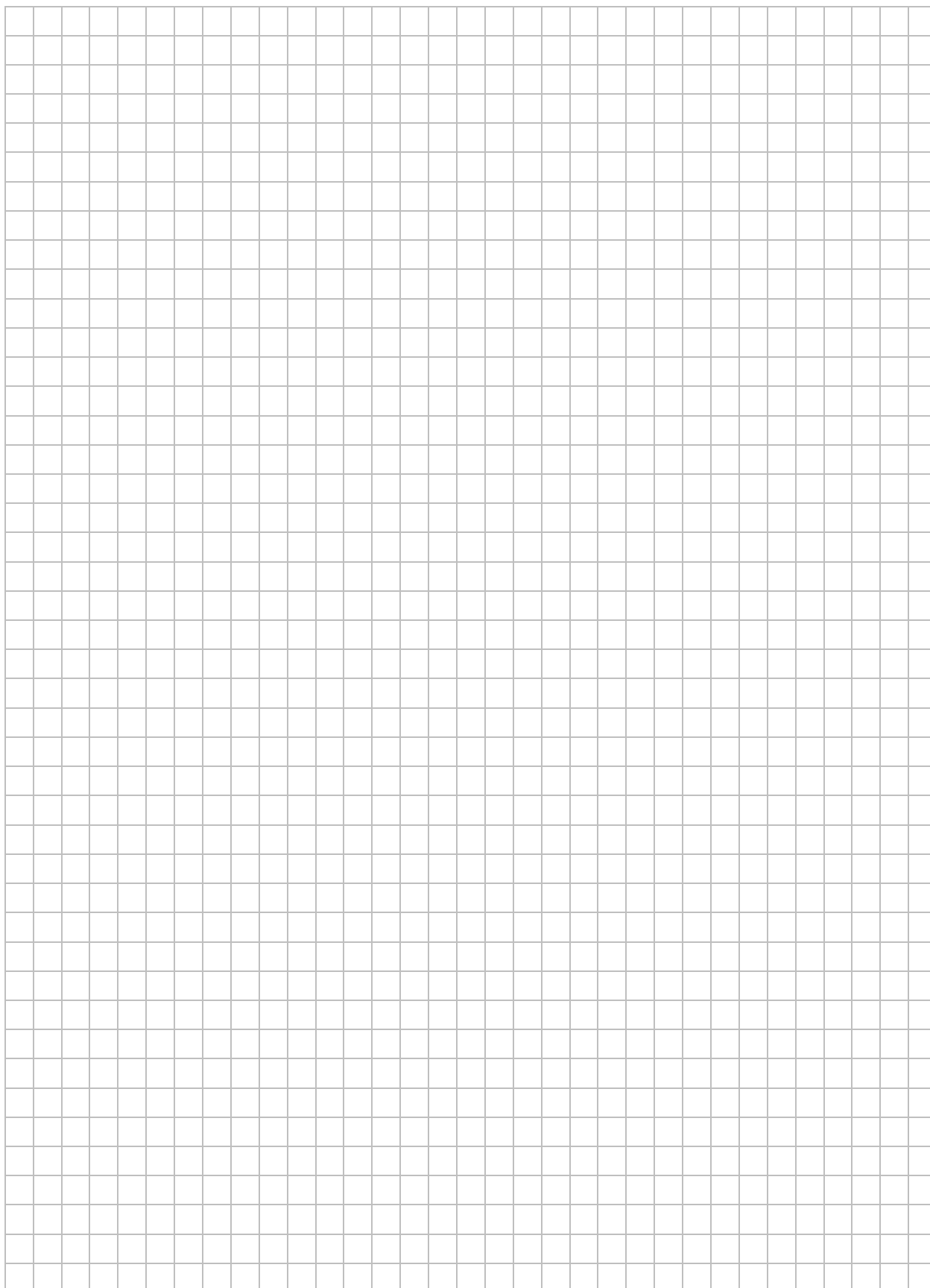
**Zadanie 12. (3 pkt)**

Udowodnij, że jeżeli liczba  $x + \frac{1}{x}$  jest liczbą całkowitą, to liczba  $\frac{1}{x^3} + x^3$  jest też liczbą całkowitą.



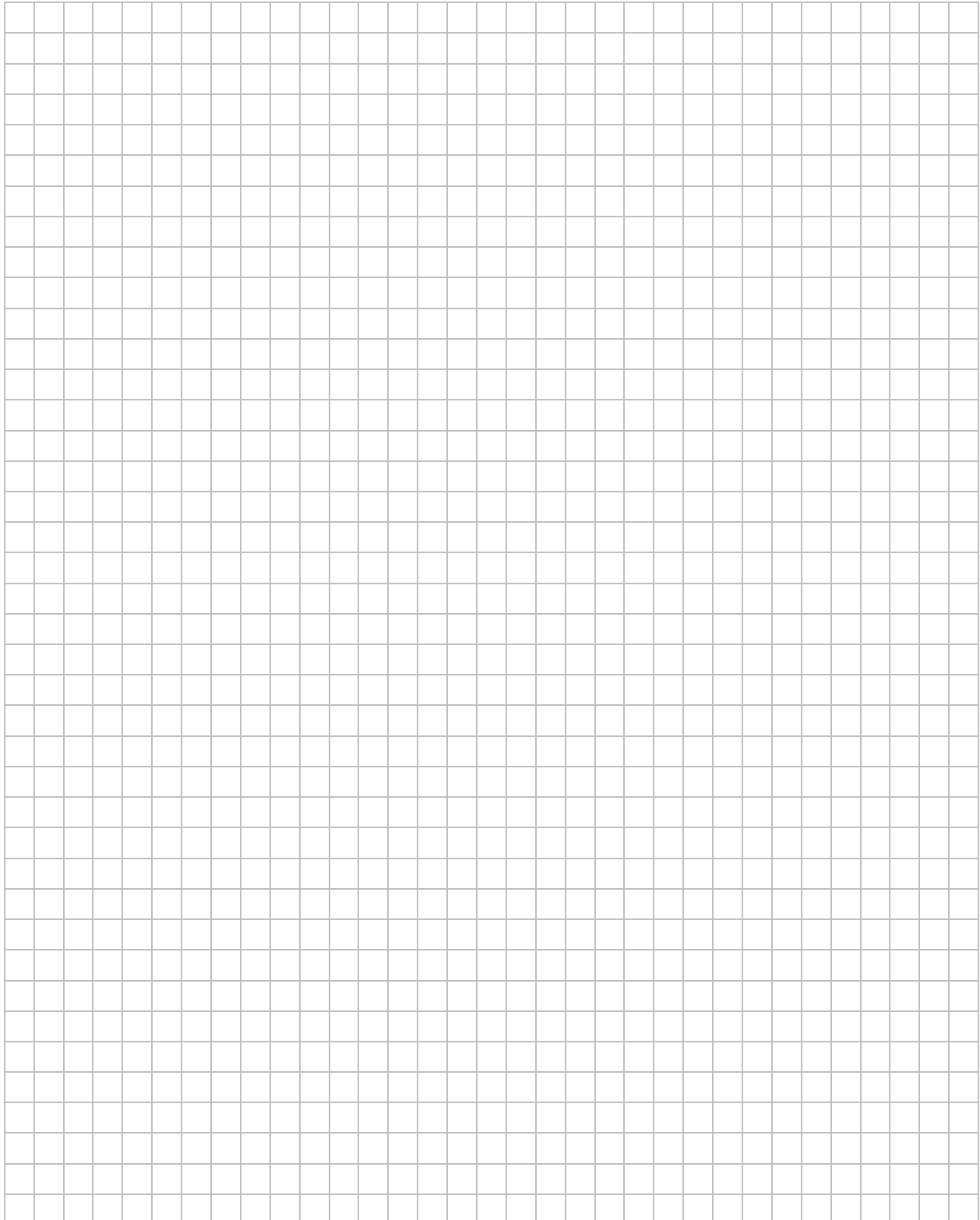
**Zadanie 13. (4 pkt)**

Rozwiąż równanie  $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$ .



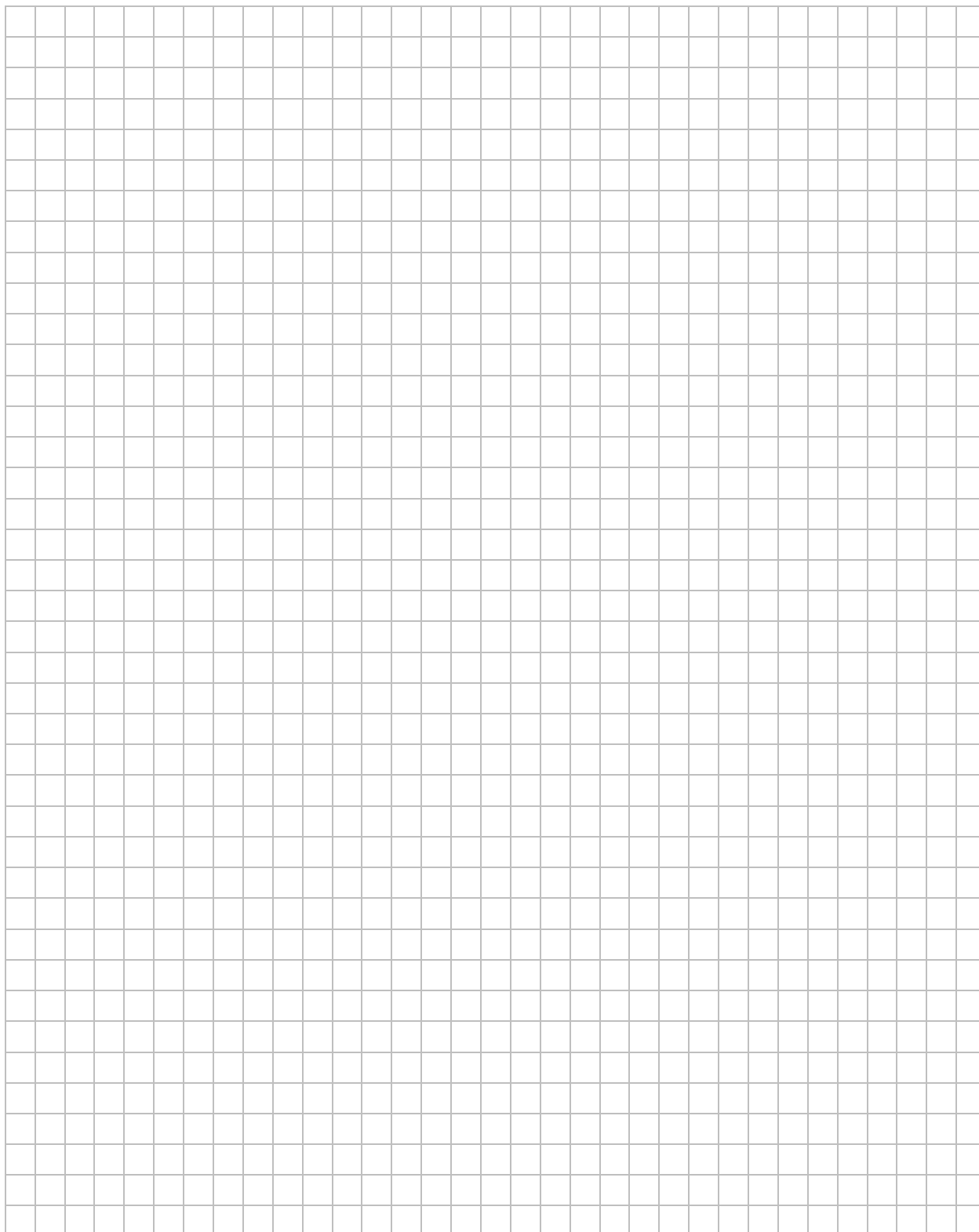
**Zadanie 14. (5 pkt)**

Długości krawędzi podstawy prostopadłościanu są równe  $3\text{ cm}$ ,  $4\text{ cm}$ . Krawędź boczna ma długość  $2\text{ cm}$ . Oblicz pole przekroju tego graniastosłupa płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem  $60^\circ$ . Sporządź rysunek i zaznacz na nim przekrój oraz kąt jego nachylenia do płaszczyzny podstawy.



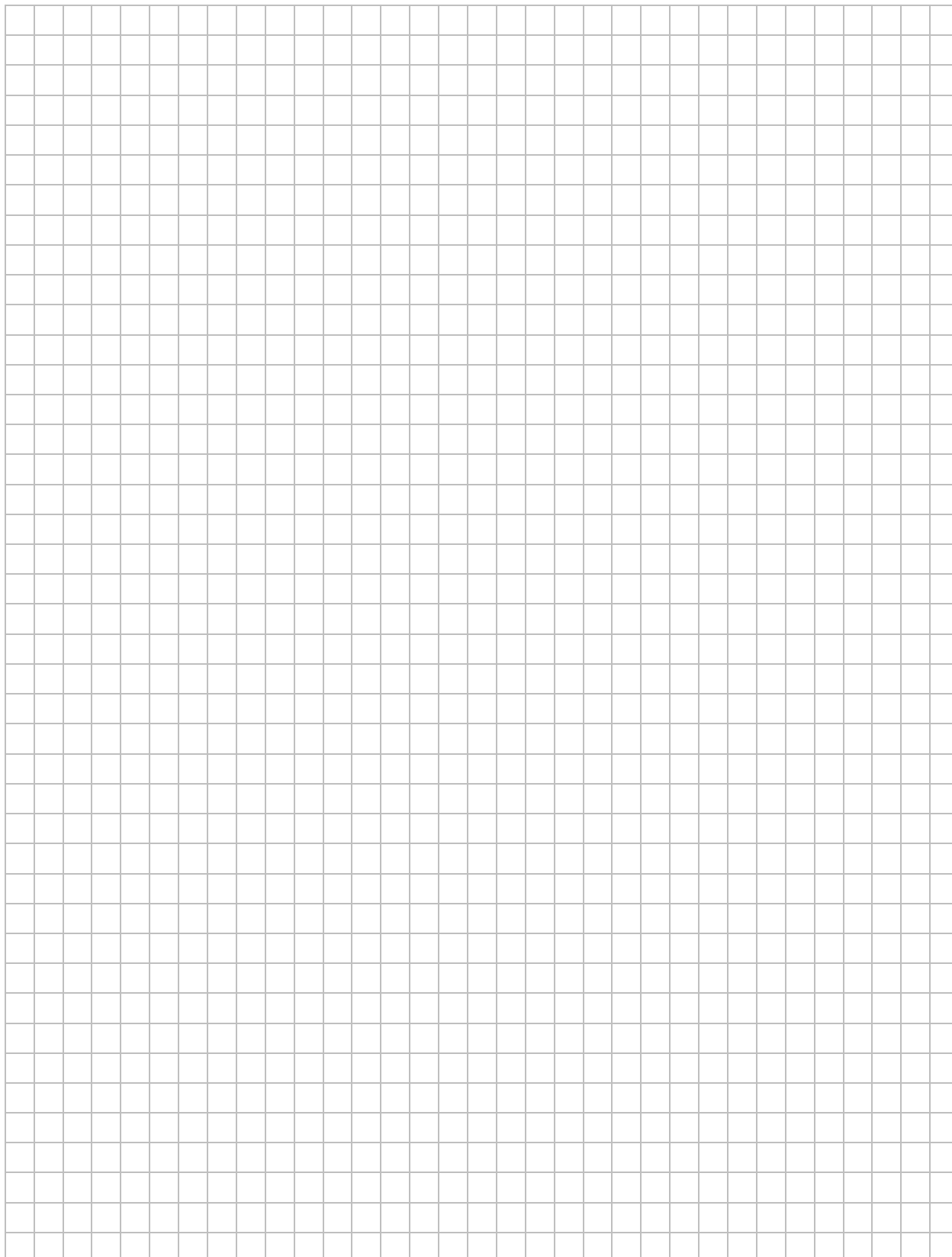
**Zadanie 15. (6 pkt)**

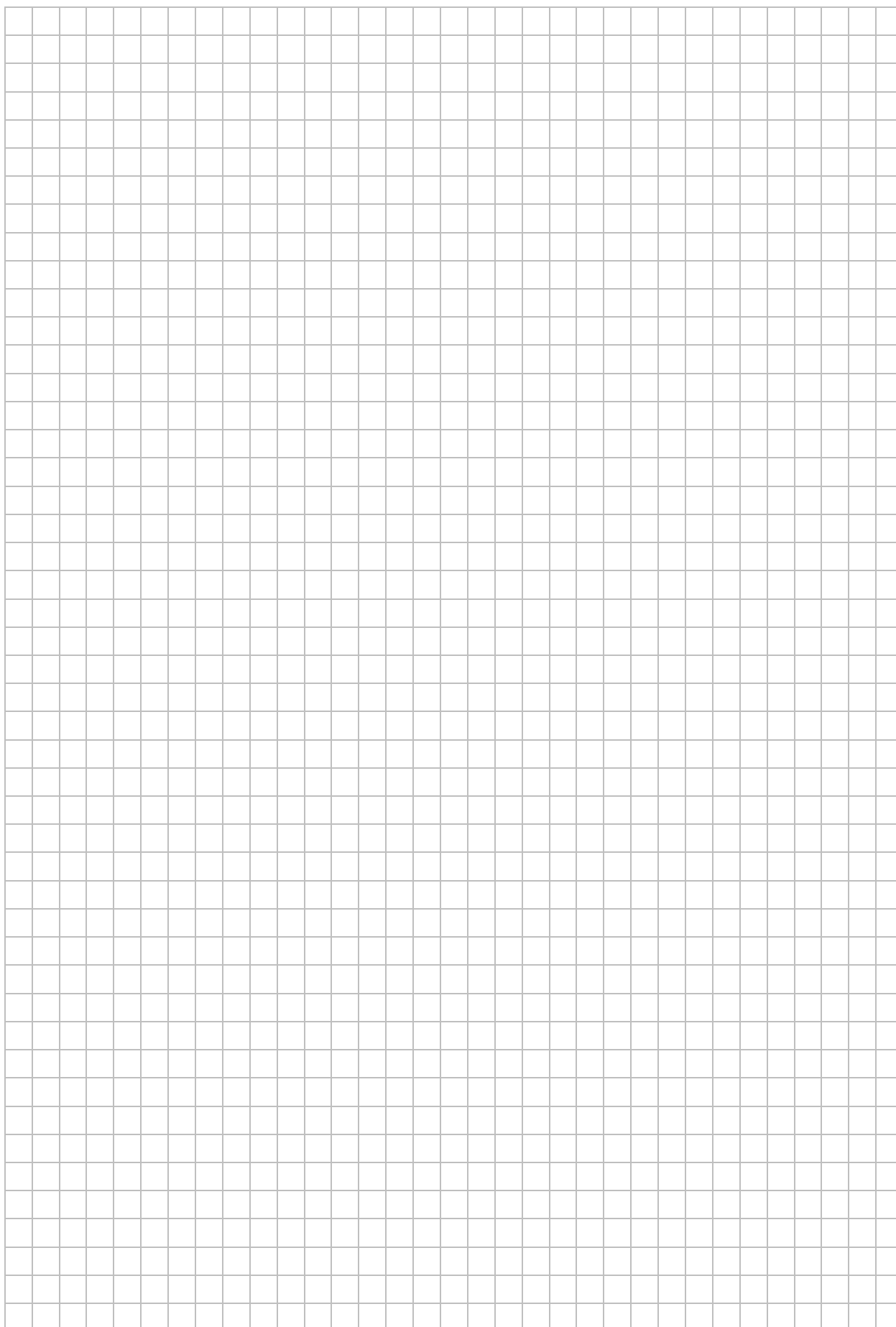
Wszystkie wierzchołki trapezu  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$  i  $|AB| > |CD|$ ) leżą na paraboli o równaniu  $y = 3 - \frac{1}{3}x^2$ . Wierzchołki  $A$  i  $B$  są punktami przecięcia tej paraboli z osią  $OX$ . Oblicz współrzędne wierzchołka trapezu o obu współrzędnych dodatnich, dla którego pole trapezu jest równe  $\frac{25}{3}$ .



**Zadanie 16. (7 pkt)**

Dane jest równanie:  $x^2 + (m - 5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$ . Zbadaj, dla jakich wartości parametru  $m$  stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Oblicz tę wartość.





***Brudnopis***

